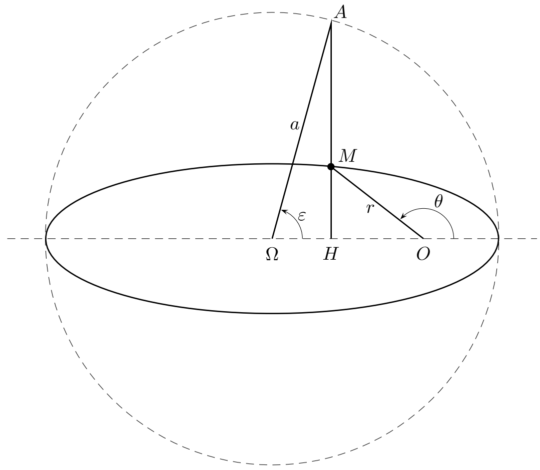
Équation de Képler

Les vecteurs sont notés en caractères italiques et gras conformément à la norme ISO.

Un corps de masse m, assimilé à un point situé en M, est soumis à une force de centre O donnée par : $\boldsymbol{F} = -\dfrac{k}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_r$. $OM = r$ est la distance du centre de force O au corps situé en M. $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ est le vecteur unitaire radial. On suppose que $k > 0$.

1. (a) Montrer que le mouvement de M est plan.
   (b) En déduire un choix d'axe (Oz).
   (c) Montrer que l'on peut adopter le système de coordonnées polaires ?
   (d) Exprimer le vecteur moment cinétique $\boldsymbol{L}_0$ en O. Dans la suite, on notera L la mesure algébrique du moment cinétique.
   (e) En vous aidant des résultats précédents, expliquer ce qu'est la loi des aires.
2. (a) Le système est-il conservatif ?
   (b) Exprimer l'énergie mécanique E_m du corps.
   (c) Qu'est l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}$.
   (d) Tracer son allure et discuter brièvement la nature des trajectoires. En quoi l'hypothèse $k > 0$ joue-t-elle un rôle à ce niveau ?
3. On pose $u = 1/r$.
   (a) Exprimer $du/d\theta$ en fonction de $\dot{r}$.
   (b) En déduire que l'énergie mécanique du corps peut s'écrire :
   $$E_m = \frac{L^2}{2m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] - ku$$
   (c) En déduire l'équation du mouvement.
   (d) Montrer que la solution de cette équation peut se mettre sous la forme : $p\,u = 1 + e\cos\theta$. Identifier p et e.
4. (a) Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = \dfrac{k}{2p}(e^2 - 1)$.
   (b) On suppose à présent, et ce jusqu'à la fin du problème, que $0 < e < 1$. Montrer que la trajectoire est elliptique. On notera a le demi-grand axe de l'ellipse.
   (c) Citer les trois lois de Képler.
   (d) Que sont le péricentre et l'apocentre de la trajectoire ? Les caractériser.
   (e) En déduire que l'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = -\dfrac{k}{2a}$.
5. On définit l'angle ε, appelé *anomalie excentrique*, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



   (a) Exprimer r en fonction de ε.
   (b) Montrer que la différence : $\Delta = E_m - E_{p,eff}$ peut s'écrire :
   $$\Delta = \frac{ke^2}{2}\frac{a\sin^2\varepsilon}{r^2}$$
   (c) Exprimer $\dot{r}$ en fonction de $\dot{\varepsilon}$.
   (d) En déduire la relation :
   $$\dot{\varepsilon}^2 = \frac{k}{ma}\frac{1}{r^2}$$
   (e) En supposant qu'à l'instant $t = 0$, le corps se trouve au péricentre, montrer que l'équation précédente peut, après mise en forme, s'intégrer pour donner l'*équation de Képler* :
   $$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}}(\varepsilon - e\sin\varepsilon)$$

♁ ***Solution***

1. (a) *D'après le théorème du moment cinétique, on a* $d\boldsymbol{L}_O/dt = 0$*. Donc* $\boldsymbol{L}_O = cste$ *; le mouvement se fait par conséquent dans un plan orthogonal à* $\boldsymbol{L}_O$ *passant par la position initiale du corps.*

   (b) *On peut alors choisir l'axe* Oz *de sorte que* $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \boldsymbol{L}_O/L$*,* L *désignant la norme du moment cinétique.*

   (c) *Le mouvement étant plan, on peut repérer* M *par deux coordonnées dans le plan du mouvement ; par exemple ses coordonnées polaires.*

   (d) *On obtient alors* $\boldsymbol{L}_O = mr^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_z$*.*

   (e) *La loi des aires exprime qu'au cours de son mouvement, le point matériel balaie des aires égales en des temps égaux. Ce résultat s'exprime mathématiquement sous la forme* $dS/dt = C/2$ *où* dS *est la surface balayée pendant la durée* dt*.* C *est la constante des aires et vaut* $r^2\dot{\theta}$ *dont on a montré plus haut qu'il s'agissait d'une constante.*

2. (a) *La force dérive d'une énergie potentielle* $E_p = -k/r$*. Puisque c'est la seule qui s'exerce sur le système, celui-ci est conservatif.*

   (b) *L'énergie mécanique s'écrit* $E_m = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p$*. L'énergie potentielle effective est* $E_{p,eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$*.*

   (c) *Si* $k > 0$*, la trajectoire peut être bornée si* $E_m < 0$*. Avec une force newtonienne, ces trajectoires bornées sont des ellipses. Le système est alors dit dans un état lié. Si* $E_m \geqslant 0$*, la trajectoire n'est plus bornée. Les trajectoire sont des paraboles (*$E_m = 0$*) ou des hyperboles (*$E_m > 0$*). On parle alors d'états de diffusion.*
   Si $k < 0$*, la trajectoire n'est jamais bornée.*

3. (a) *On établit* $u' = -m\dot{r}/L$*.*

   (b) *D'où* $E_m = \frac{L^2}{2m}(u'^2 + u^2) - ku$*.*

   (c) *En dérivant, on a* $dE_m/d\theta = 0$*, soit* $u'' + u = mk/L^2$*. D'où* $u(\theta) = \lambda\cos(\theta - \theta_0) + mk/L^2$*.*

   (d) *On peut choisir* Ox *de sorte que* $\theta_0 = 0$*. Alors* $\lambda^2 = \left(\frac{mk}{L}\right)^2\left[1 + \frac{2L^2}{mk^2}E_m\right]$*. On peut remarquer que puisque* $\lambda^2 \geqslant 0$*, on a* $E_m \geqslant -mk^2/2L^2$*.*
   Enfin, $p = L^2/mk$ *et* $e = \lambda L^2/mk$*.*

   (e) *On déduit* $E_m = \frac{mk^2}{2L^2}(e^2 - 1)$ *ou encore* $E_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1)$

4. (a) *Pour* $0 < e < 1$*, l'équation polaire obtenue plus haut est celle d'une ellipse.*

   (b) *Trois lois : trajectoires elliptiques, loi des aires,* $T^2/a^3 = cste$*.*

   (c) *Le péricentre est le point le plus proche de* O *:* $r_P = p/(1+e)$*. L'apocentre est le point le plus éloigné de* O *:* $r_A = p/(1-e)$*.*

   (d) *Avec* $r_P + r_A = 2a$*, on déduit* $p = a(1-e^2)$*. D'où* $E_m = -k/2a$*.*

5. (a) *Géométriquement, on a* $\Omega H = \Omega O + OH$*. Or* $\Omega O = ea$*,* $OH = r\cos\theta$*,* $\Omega H = a\cos\varepsilon$*. En utilisant* $pu = 1 + e\cos\theta$*, il vient* $r = a(1 - e\cos\varepsilon)$*.*

   (b) *On a* $\Delta = \frac{k}{2p}(e^2 - 1) - \left[\frac{L^2}{2m}u^2 - ku\right]$ *qui peut se mettre sous la forme* $\Delta = \frac{k}{2p}\left[e^2 - (pu-1)^2\right]$*. En remplaçant* u *par son expression en fonction de* ε *trouvée à la question précédente et en développant, il vient* $\Delta = \frac{ke^2}{2}\frac{a\sin^2\varepsilon}{r^2}$*.*

   (c) *Dérivons par rapport au temps la relation obtenue à la question 5.(a). Alors* $\dot{r} = ea\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon$*.*

   (d) *Avec* $\Delta = m\dot{r}^2/2$*, il vient* $\dot{\varepsilon}^2 = k/mar^2$*.*

   (e) *Ensuite* $\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{k}{ma}}\frac{1}{r}$*. À l'aide de la relation de la question 5.(a), on obtient* $(p + e^2a)\varepsilon - ea\sin\varepsilon = \sqrt{\frac{k}{ma}}t$ *puis* $t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}}(\varepsilon - e\sin\varepsilon)$*.*

♁♁♁